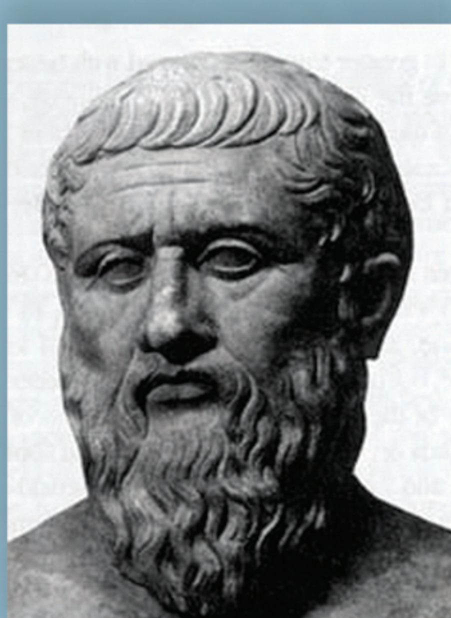
# ΜΕΡΟΣ Β΄

# 3ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

## Τρίγωνα - Παραλληλόγραμμα - Τραπέζια





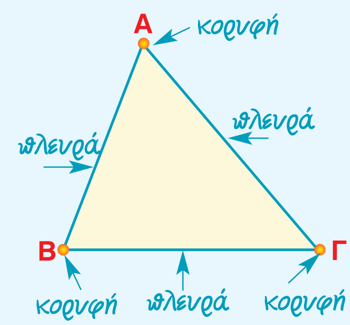
ΠΛΑΤΩΝ Ο ΑΘΗΝΑΙΟΣ
(427 - 347 π.Χ.)

## Β.3.1. Στοιχεία τριγώνου - Είδη τριγώνων

### Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

#### Κύρια στοιχεία τριγώνου

- Κάθε τρίγωνο **ΑΒΓ** έχει τρεις **κορυφές Α, Β, Γ**, τρεις **πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ** και τρεις **γωνίες** $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$.
- Τα **ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ**, εκτός από τις πλευρές, συμβολίζουν και τα μήκη των αντίστοιχων ευθυγράμμων τμημάτων.



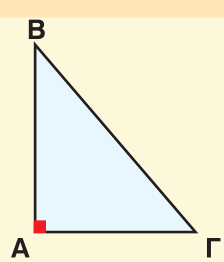
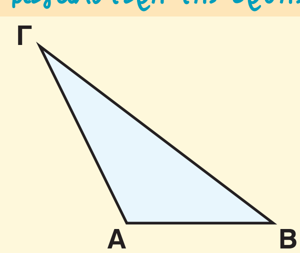
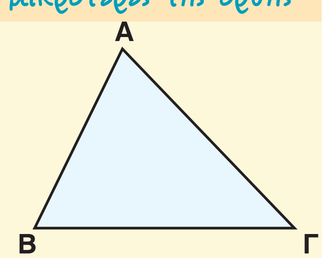

### ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ

*Παρακάτω βλέπουμε την κατάταξη των τριγώνων με βάση δύο συγκεκριμένα κριτήρια.*

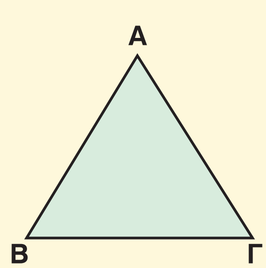
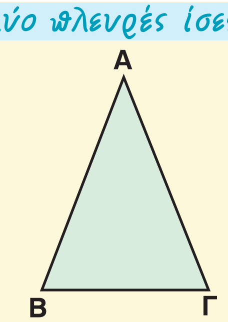
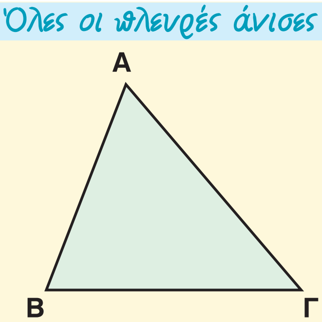
➢ *Μπορείς να εκφράσεις με λόγια τα κριτήρια με τα οποία έγινε αυτή η κατάταξη;*

### Σκεφτόμαστε

Με βάση το 1ο κριτήριο διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

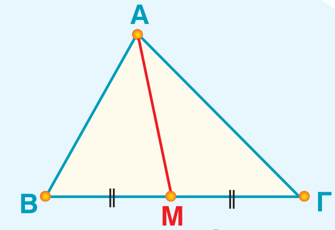
| Πλευρές κάθετες | Όχι κάθετες πλευρές | |
|---|---|---|
| Μία γωνία ορθή | Μία γωνία μεγαλύτερη της ορθής | Όλες οι γωνίες μικρότερες της ορθής |
|   |   |   |
| Ορθογώνιο | Αμβλυγώνιο | Οξυγώνιο |

Με βάση το 2ο κριτήριο διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

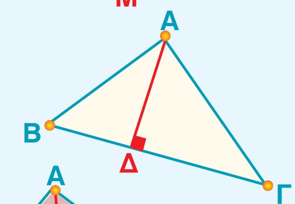
| Ισότητα πλευρών | | Ανισότητα πλευρών |
|---|---|---|
| Τρεις πλευρές ίσες | Δύο πλευρές ίσες | Όλες οι πλευρές άνισες |
|   |   |   |
| Ισόπλευρο | Ισοσκελές | Σκαληνό |

## Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου

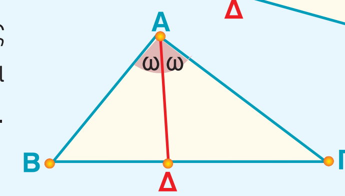
- Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει την κορυφή ενός τριγώνου με το μέσο της απέναντι πλευράς, λέγεται **διάμεσος**.




- Το ευθύγραμμο τμήμα που φέρνουμε από μία κορυφή ενός τριγώνου κάθετο στην ευθεία της απέναντι πλευράς, λέγεται **ύψος** του τριγώνου.




- Το ευθύγραμμο τμήμα της διχοτόμου μιας γωνίας ενός τριγώνου που φέρνουμε από μια κορυφή και καταλήγει στην απέναντι πλευρά, λέγεται **διχοτόμος** του τριγώνου.




## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΗ

*Να σχεδιαστούν τα ύψη σε τρίγωνο που είναι: (α) οξυγώνιο, (β) αμβλυγώνιο και (γ) ορθογώνιο.*

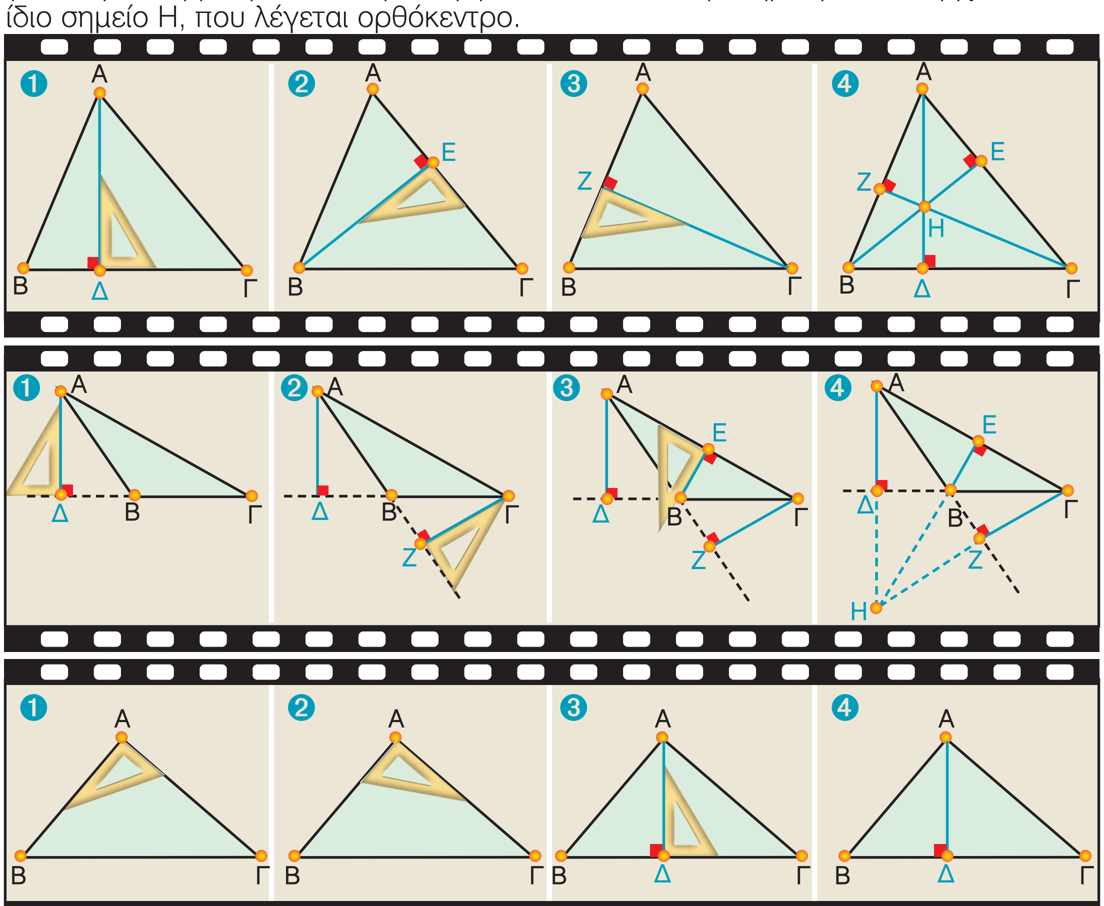
### Λύση

Από την κορυφή π.χ. την Α του τριγώνου ΑΒΓ φέρνουμε την κάθετο στην απέναντι πλευρά του. Τότε η απόσταση του Α από την πλευρά ΒΓ είναι το ύψος ΑΔ του τριγώνου. Αυτήν τη διαδικασία την επαναλαμβάνουμε και από τις άλλες δύο κορυφές του τριγώνου για να βρούμε και τα τρία ύψη του, τα οποία παρατηρούμε ότι διέρχονται από το ίδιο σημείο Η, που λέγεται ορθόκεντρο.

(α)

(β)

(γ)



## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

**1.** Τοποθέτησε ένα “x” στην αντίστοιχη θέση.

| | | ΣΩΣΤΟ | ΛΑΘΟΣ |
|---|---|---|---|
| (α) | Κάθε ορθογώνιο τρίγωνο έχει μια ορθή γωνία. | | |
| (β) | Το αμβλυγώνιο τρίγωνο έχει δύο αμβλείες γωνίες. | | |
| (γ) | Το ισόπλευρο τρίγωνο έχει όλες τις πλευρές του ίσες. | | |
| (δ) | Το ισοσκελές τρίγωνο μπορεί να είναι και αμβλυγώνιο. | | |
| (ε) | Το ορθογώνιο τρίγωνο μπορεί να είναι και ισόπλευρο. | | |
| (στ) | Το ορθογώνιο τρίγωνο μπορεί να είναι και ισοσκελές. | | |
| (ζ) | Το ισόπλευρο τρίγωνο είναι πάντα οξυγώνιο. | | |
| (η) | Ένα σκαληνό τρίγωνο δεν μπορεί να είναι ορθογώνιο. | | |

**2.** Σ' ένα τρίγωνο ΑΒΓ, με πλευρά ΒΓ = 4,4 cm, φέρε τη διάμεσο ΑΜ. Μετά φέρε τις διαμέσους ΑΚ και ΑΛ των τριγώνων ΑΒΜ και ΑΓΜ και βρες το μήκος των ΚΜ και ΛΓ.

**3.** Σχεδίασε ένα τρίγωνο ΑΒΓ. (α) Βρες το μέσο Δ της πλευράς ΑΒ, το μέσο Ε της πλευράς ΒΓ και το μέσο Ζ της πλευράς ΓΑ. (β) Σχεδίασε τη διάμεσο ΑΕ του τριγώνου ΑΒΓ που τέμνει τη ΖΔ στο σημείο Μ. Σύγκρινε με το διαβήτη τα τμήματα ΔΜ και ΜΖ. Τι παρατηρείς;

**4.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. (α) Φέρε τις διαμέσους ΑΜ και ΒΝ και ονόμασε με το γράμμα Θ το σημείο στο οποίο τέμνονται. (β) Μετά σχεδίασε την ευθεία ΓΘ και ονόμασε με το γράμμα Ρ το σημείο στο οποίο η ευθεία ΓΘ τέμνει την πλευρά ΑΒ. (γ) Σύγκρινε με το διαβήτη τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΡ και ΒΡ. Τι παρατηρείς;

**5.** Σχεδίασε ένα τρίγωνο ΑΒΓ, πάρε το μέσο Μ της πλευράς ΒΓ και χάραξε από το σημείο Μ μια ευθεία ε παράλληλη προς την πλευρά ΑΒ του τριγώνου. Αν το σημείο στο οποίο τέμνει την πλευρά ΑΓ το ονομάσεις Ν, να συγκρίνεις με το διαβήτη τα τμήματα ΑΝ και ΝΓ. Τι παρατηρείς;

## ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

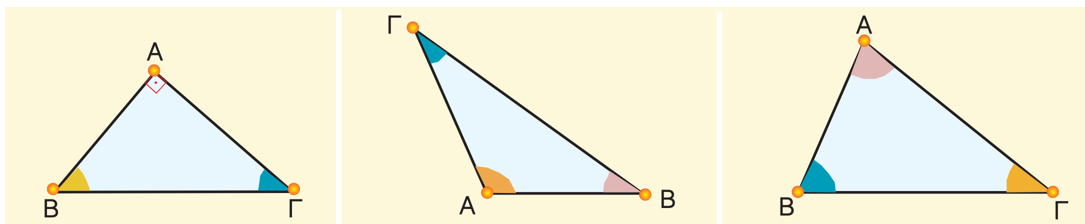
Να συμπληρώσεις τον παρακάτω πίνακα με τα σχήματα των αντίστοιχων τριγώνων.

| ΤΡΙΓΩΝΑ | Οξυγώνιο | Ορθογώνιο | Αμβλυγώνιο |
|---|---|---|---|
| Σκαληνό | | | |
| Ισοσκελές | | | |
| Ισόπλευρο | | | |

# Β.3.2. Άθροισμα γωνιών τριγώνου - Ιδιότητες ισοσκελούς τριγώνου

## ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

*Σχεδίασε διάφορα τυχαία ορθογώνια, αμβλυγώνια και οξυγώνια τρίγωνα, όπως π.χ. αυτά που φαίνονται πιο κάτω. Μέτρησε τις γωνίες τους με το μοιρογνωμόνιο και υπολόγισε το άθροισμά τους. Μπορείς να διατυπώσεις κάποιο συμπέρασμα;*




## ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

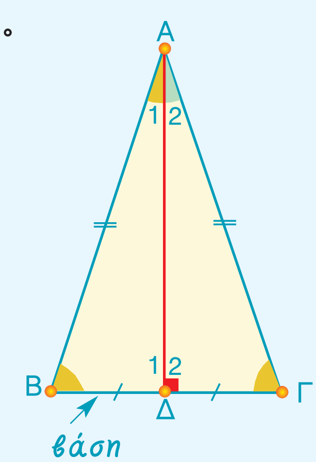
*Προσπάθησε να διαπιστώσεις ποια διάμεσος ενός ισοσκελούς τριγώνου είναι άξονας συμμετρίας του και γιατί.*

## ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 3η

*Σχεδίασε ένα ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και τις διαμέσους του ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ. Δικαιολόγησε γιατί οι διάμεσοι του ισόπλευρου είναι διχοτόμοι και ύψη του.*

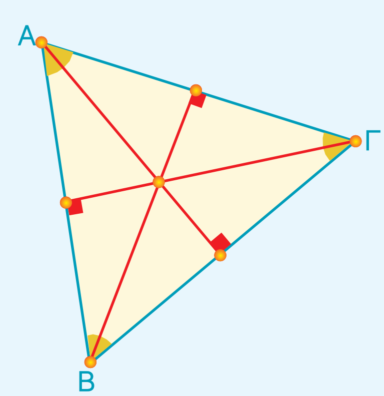
## Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180°$




Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο ισχύει ότι:

- Η ευθεία της **διαμέσου**, που αντιστοιχεί στη βάση είναι **άξονας συμμετρίας** του **ισοσκελούς** τριγώνου.
- Η **διάμεσος**, που αντιστοιχεί στη βάση είναι **ύψος** και **διχοτόμος**.
- Οι **προσκείμενες γωνίες** στη βάση του ισοσκελούς είναι **ίσες**.




Σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο ισχύει ότι:

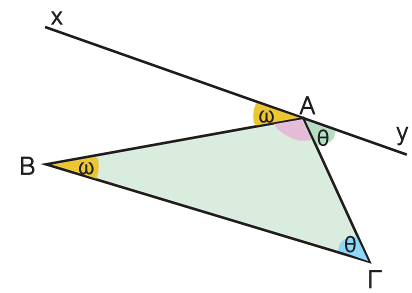
- Οι ευθείες των διαμέσων είναι άξονες συμμετρίας του ισοπλεύρου τριγώνου.
- Κάθε διάμεσος είναι ύψος και διχοτόμος.
- Όλες οι πλευρές και όλες οι γωνίες του ισοπλεύρου τριγώνου είναι ίσες.

## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

**1.** *Να δικαιολογηθεί με λογικά επιχειρήματα ότι το άθροισμα των τριών γωνιών κάθε τριγώνου είναι 180°.*

### Λύση

Σχεδιάζουμε το τρίγωνο **ΑΒΓ** και μία ευθεία **xAy**, που διέρχεται από το **Α** και είναι παράλληλη προς την ευθεία **ΒΓ**.




Παρατηρούμε ότι:

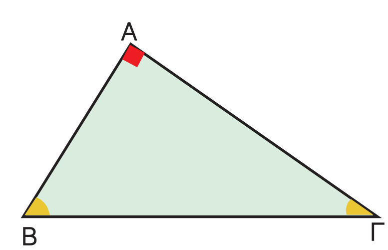
$x\hat{A}B = \hat{\omega} = \hat{B}$ γιατί είναι γωνίες εντός εναλλάξ, των παράλληλων ευθειών **xAy** και **ΒΓ**, που τέμνονται από την **ΑΒ**.

$y\hat{A}\Gamma = \hat{\theta} = \hat{\Gamma}$ γιατί είναι γωνίες εντός εναλλάξ των παράλληλων ευθειών **xAy** και **ΒΓ**, που τέμνονται από την **ΑΓ**.

Οι γωνίες $\hat{\omega}$, $\hat{A}$ και $\hat{\theta}$ σχηματίζουν μια ευθεία γωνία.
Επομένως θα είναι: $\hat{\omega} + \hat{A} + \hat{\theta} = 180°$.
Επειδή όμως είναι: $\hat{\omega} = \hat{B}$ και $\hat{\theta} = \hat{\Gamma}$, θα έχουμε: $\hat{B} + \hat{A} + \hat{\Gamma} = 180°$.

**2.** *Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο οι οξείες γωνίες είναι συμπληρωματικές.*

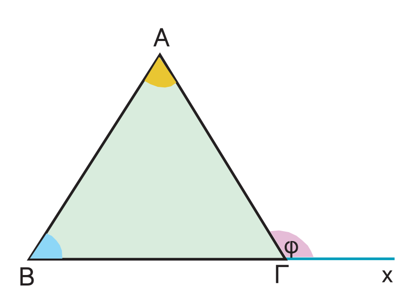
### Λύση




Σχεδιάζουμε το ορθογώνιο τρίγωνο **ΑΒΓ** με $\hat{A} = 90°$.
Επειδή είναι: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180°$ θα έχουμε:
$\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180° - 90° = 90°$.
Γνωρίζουμε, ότι δύο γωνίες που έχουν άθροισμα **90°** λέγονται **συμπληρωματικές**. Άρα, σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο οι οξείες γωνίες του είναι συμπληρωματικές.

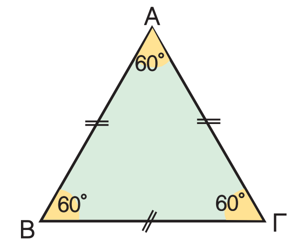
**3.** *Το άθροισμα δύο γωνιών ενός τριγώνου ισούται με την εξωτερική της τρίτης γωνίας. (Στο τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία $A\hat{\Gamma}x$, που σχηματίζεται από την ΑΓ και την προέκταση της ΒΓ προς το μέρος του Γ, ονομάζεται εξωτερική γωνία της $\hat{\Gamma}$).*

### Λύση




Η εξωτερική γωνία $\hat{\varphi}$ είναι παραπληρωματική της εσωτερικής γωνίας $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου, δηλαδή θα είναι $\hat{\varphi} = 180° - \hat{\Gamma}$.
Επειδή σε κάθε τρίγωνο είναι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180°$, άρα $\hat{A} + \hat{B} = 180° - \hat{\Gamma}$, δηλαδή $\hat{A} + \hat{B} = \hat{\varphi}$.
Άρα, η εξωτερική γωνία ισούται με το άθροισμα των δύο άλλων γωνιών του τριγώνου.

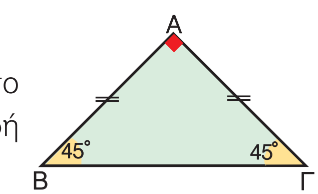
**4.** *Οι γωνίες ενός ισόπλευρου τριγώνου είναι όλες ίσες με 60°.*




**Λύση**

Γνωρίζουμε ότι στο ισόπλευρο τρίγωνο είναι: $\hat{A} = \hat{B} = \hat{\Gamma}$.
Επειδή σε κάθε τρίγωνο είναι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180°$, θα είναι $\hat{A} + \hat{A} + \hat{A} = 180°$, δηλαδή $3 \cdot \hat{A} = 180°$, συνεπώς: $\hat{A} = 180° : 3 = 60°$. Άρα, όλες οι γωνίες του ισόπλευρου τριγώνου είναι ίσες με 60°.

**5.** *Να υπολογιστούν οι γωνίες ενός ορθογωνίου και ισοσκελούς τριγώνου.*

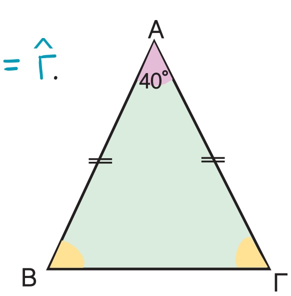



**Λύση**

Σε κάθε τρίγωνο ισχύει $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180°$. Επειδή στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία $\hat{A}$ είναι ορθή, δηλαδή $\hat{A} = 90°$, θα είναι: $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 90°$.
Επειδή το τρίγωνο είναι και ισοσκελές θα είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$, άρα θα είναι $\hat{B} + \hat{B} = 90°$, από την οποία προκύπτει ότι:
$2 \cdot \hat{B} = 90°$, δηλαδή θα έχουμε $\hat{B} = 90° : 2 = 45°$ και επομένως και $\hat{\Gamma} = 45°$.

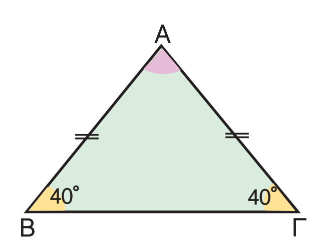
**6.** *Να βρεθούν τα μέτρα των γωνιών ενός ισοσκελούς τριγώνου, αν είναι γνωστό μόνο ότι το μέτρο μιας γωνίας του είναι 40°.*

**Λύση**




Έστω ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ. Τότε θα είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.
Επειδή είναι $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180°$, διακρίνουμε τις εξής δύο περιπτώσεις:

(α) Αν είναι $\hat{A} = 40°$.
Συνεπώς θα είναι $40° + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 180°$, επομένως $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180° - 40°$. Επομένως θα είναι $\hat{B} + \hat{B} = 140°$, από την οποία προκύπτει ότι: $2 \cdot \hat{B} = 140°$, δηλαδή $\hat{B} = 140° : 2 = 70°$ άρα και $\hat{\Gamma} = 70°$.




(β) Αν είναι $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 40°$.
Θα είναι $\hat{A} + 40° + 40° = 180°$, δηλαδή $\hat{A} + 80° = 180°$, συνεπώς θα έχουμε: $\hat{A} = 180° - 80° = 100°$.
Παρατηρούμε ότι με τα ίδια ακριβώς δεδομένα προκύπτουν δύο τελείως διαφορετικά ισοσκελή τρίγωνα, τα οποία όμως ικανοποιούν αυτά τα δεδομένα.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

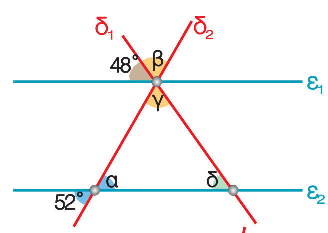
**1.** Τοποθέτησε ένα "x" στην αντίστοιχη θέση.

| | ΣΩΣΤΟ | ΛΑΘΟΣ |
|---|---|---|
| (α) Οι προσκείμενες γωνίες στη βάση ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες. | | |
| (β) Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 90^\circ$. | | |
| (γ) Κάθε ισόπλευρο τρίγωνο έχει όλες τις γωνίες ίσες με $30^\circ$. | | |
| (δ) Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η ευθεία μιας διαμέσου είναι άξονας συμμετρίας. | | |
| (ε) Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διάμεσος, που αντιστοιχεί στη βάση, είναι και διχοτόμος. | | |
| (στ) Σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο οι ευθείες των πλευρών είναι άξονες συμμετρίας. | | |
| (ζ) Σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο οι ευθείες των υψών είναι άξονες συμμετρίας. | | |
| (η) Σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο κάθε διάμεσος είναι και ύψος. | | |
| (θ) Σε κάθε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο οι προσκείμενες γωνίες στη βάση είναι $60^\circ$. | | |

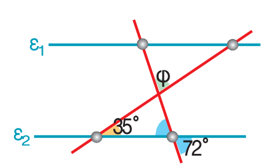
**2.** Σχεδίασε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ώστε να είναι $\hat{B} = 75^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 35^\circ$ και υπολόγισε τη γωνία $\hat{A}$.

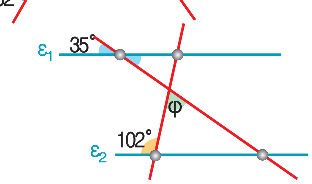
**3.** Σχεδίασε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, στο οποίο να είναι $\hat{A} = 90^\circ$, $\hat{B} = 60^\circ$ και ΑΒ = 4,2 cm. (α) Υπολόγισε τη γωνία $\hat{\Gamma}$. (β) Μέτρησε την πλευρά ΒΓ και σύγκρινε το μήκος της με το μήκος της πλευράς ΑΒ.

**4.** Στο διπλανό σχήμα είναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.
Να υπολογίσεις τις γωνίες $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, $\hat{\gamma}$ και $\hat{\delta}$.

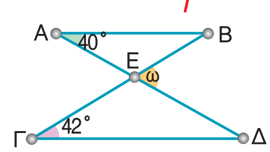



**5.** Στα διπλανά σχήματα είναι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.
Να υπολογίσεις τη γωνία $\hat{\varphi}$.




**6.** Στο διπλανό σχήμα είναι ΑΒ//ΓΔ. Υπολόγισε τη γωνία $\hat{\omega}$.




**7.** Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο, η γωνία που είναι απέναντι από τη βάση είναι $74^\circ$.
Να υπολογίσεις τις υπόλοιπες γωνίες.

**8.** Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{A} = 36^\circ$ και η γωνία $\hat{B}$ είναι διπλάσια από τη $\hat{\Gamma}$.
Υπολόγισε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$.

**9.** Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία $\hat{A}$ είναι διπλάσια από τη $\hat{B}$ και η $\hat{\Gamma}$ τριπλάσια από τη $\hat{B}$.
Να υπολογίσεις τις γωνίες του τριγώνου.

**10.** Να σχεδιάσεις ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ, να πάρεις ένα σημείο Ο στο εσωτερικό του και να φέρεις τις ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ και ΟΔ. Να υπολογίσεις το άθροισμα των γωνιών $A\hat{O}B$, $B\hat{O}\Gamma$, $\Gamma\hat{O}\Delta$ και $\Delta\hat{O}A$ και στη συνέχεια το άθροισμα των γωνιών του ΑΒΓΔ.

## Β.3.3. Παραλληλόγραμμο - Ορθογώνιο - Ρόμβος - Τετράγωνο - Τραπέζιο - Ισοσκελές τραπέζιο

### *ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ*

*Η υπηρεσία οδικής ασφάλειας αποφάσισε να βάψει το οδόστρωμα σε όλες τις διασταυρώσεις με έντονο κίτρινο χρώμα. Για να κάνει τους υπολογισμούς της, πρέπει να βρεθεί το ακριβές σχήμα του οδοστρώματος στο κοινό μέρος δύο δρόμων, σε κάθε διασταύρωση.*

➢ *Με την προϋπόθεση ότι οι δρόμοι που διασταυρώνονται είναι ευθείς, προσπάθησε να βρεις όλες τις περιπτώσεις των τετραπλεύρων που σχηματίζουν οι δρόμοι:*

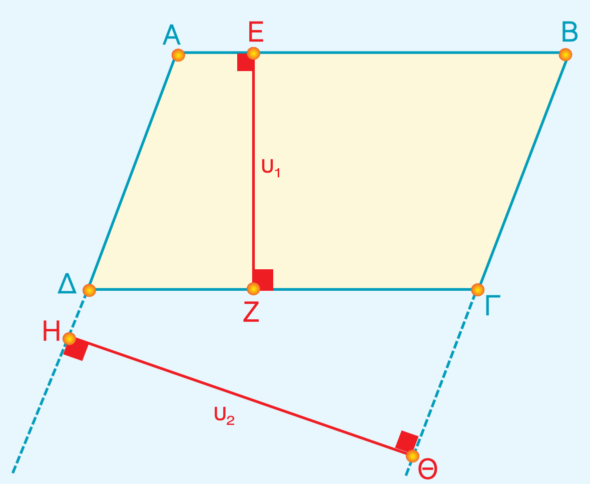
*(α) όταν έχουν το ίδιο πλάτος και τέμνονται καθέτως.*
*(β) όταν έχουν διαφορετικό πλάτος και τέμνονται καθέτως.*
*(γ) όταν έχουν το ίδιο πλάτος και τέμνονται πλαγίως.*
*(δ) όταν έχουν διαφορετικό πλάτος και τέμνονται πλαγίως.*

### Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

- **Παραλληλόγραμμο** λέγεται το τετράπλευρο **ΑΒΓΔ** που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες, δηλαδή **ΑΒ//ΓΔ** και **ΑΔ//ΒΓ**.

- Κάθε πλευρά του παραλληλογράμμου μπορεί να ονομαστεί **βάση** του παραλληλογράμμου.

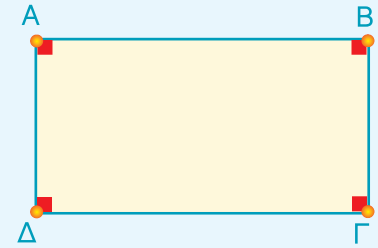
- Η απόσταση της βάσης από την απέναντι πλευρά λέγεται **ύψος** του παραλληλογράμμου.



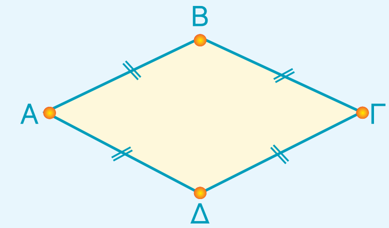

Για τις βάσεις **ΑΒ** και **ΓΔ** ύψος είναι το **ΕΖ**, ενώ για τις βάσεις **ΑΔ** και **ΒΓ** ύψος είναι το **ΗΘ**.

## Ειδικές περιπτώσεις παραλληλογράμμων

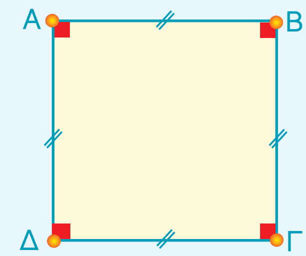
- Ένα παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις γωνίες του ορθές λέγεται **ορθογώνιο παραλληλόγραμμο** ή απλά **ορθογώνιο**.




- Ένα παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις πλευρές του ίσες λέγεται **ρόμβος**.

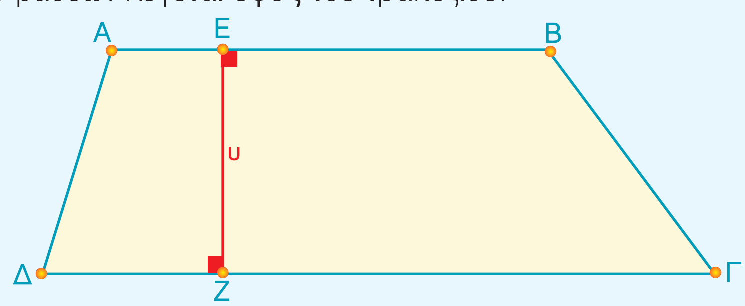



- Ένα παραλληλόγραμμο που έχει όλες τις γωνίες του ορθές και όλες τις πλευρές του ίσες λέγεται **τετράγωνο**.




## Τραπέζιο

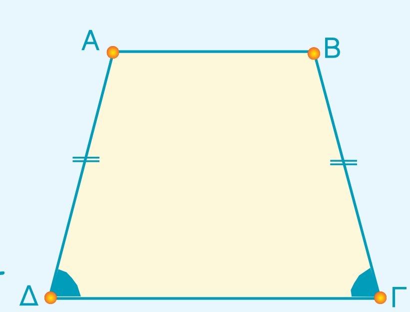
- Το τετράπλευρο **ΑΒΓΔ** του οποίου μόνο δύο πλευρές είναι παράλληλες λέγεται **τραπέζιο**.
- Οι παράλληλες πλευρές **ΑΒ, ΓΔ (ΑΒ//ΓΔ)** του τραπεζίου λέγονται **βάσεις** του τραπεζίου.
- Η απόσταση των βάσεων λέγεται **ύψος** του τραπεζίου.



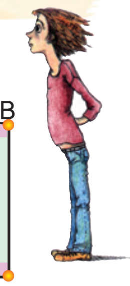

*Η απόσταση των βάσεων ΑΒ και ΓΔ είναι το ύψος ΕΖ.*

- Αν ένα τραπέζιο έχει τις μη παράλληλες πλευρές του ίσες λέγεται **ισοσκελές τραπέζιο**.

*Είναι ΑΔ = ΒΓ*



## ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ



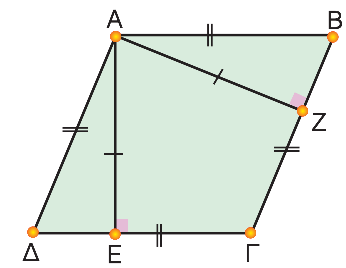
**1.** *Να εξηγήσετε γιατί οι πλευρές του ορθογωνίου είναι και ύψη.*

**Λύση**


Επειδή όλες οι γωνίες του ορθογωνίου είναι ορθές, οι διαδοχικές πλευρές του θα είναι κάθετες μεταξύ τους. Επομένως οι πλευρές του ορθογωνίου είναι και ύψη.

**2.** *Να συγκριθούν τα ύψη του ρόμβου που άγονται από μία κορυφή.*

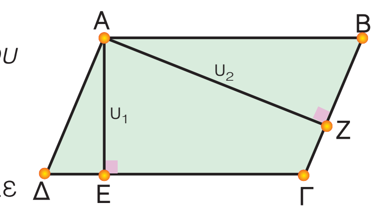
**Λύση**




Συγκρίνουμε με το διαβήτη ή με διαφανές χαρτί τα ύψη **ΑΕ** και **ΑΖ** του ρόμβου και διαπιστώνουμε ότι είναι ίσα, δηλαδή: **ΑΕ = ΑΖ.**

**3.** *Να σχεδιαστούν τα ύψη του παραλληλογράμμου που άγονται από μία κορυφή.*

**Λύση**




Τα ύψη του παραλληλογράμμου **ΑΒΓΔ** που φέρνουμε από την κορυφή **Α** στις πλευρές **ΔΓ** και **ΒΓ** είναι τα **ΑΕ** και **ΑΖ** αντίστοιχα.

## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

**1.** *Τοποθέτησε ένα "x" στην αντίστοιχη θέση.*

| | ΣΩΣΤΟ | ΛΑΘΟΣ |
|---|---|---|
| (α) *Ένα τετράγωνο είναι και ρόμβος.* | | |
| (β) *Ένας ρόμβος είναι τετράγωνο.* | | |
| (γ) *Κάθε διαγώνιος ορθογωνίου παραλληλογράμμου το χωρίζει σε δύο ορθογώνια τρίγωνα.* | | |
| (δ) *Κάθε διαγώνιος ρόμβου τον χωρίζει σε δύο ισόπλευρα τρίγωνα.* | | |
| (ε) *Κάθε διαγώνιος ισοσκελούς τραπεζίου το χωρίζει σε δύο ισοσκελή τρίγωνα.* | | |

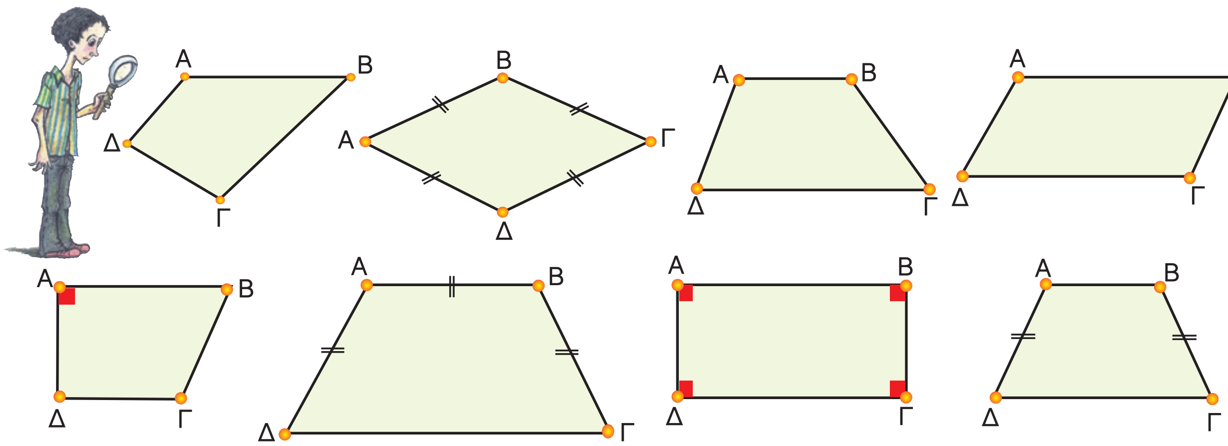
**2.** *Πόσα ισοσκελή τρίγωνα σχηματίζονται σ' ένα ισοσκελές τραπέζιο, που έχει τρεις πλευρές ίσες, όταν φέρουμε τις δύο διαγώνιές του; Δικαιολόγησε την απάντησή σου.*

**3.** *Με τέσσερα σπίρτα (ολόκληρα και ίσα) ποια τετράπλευρα μπορείς να κατασκευάσεις; Δικαιολόγησε την απάντησή σου.*

**4.** *Με δύο ολόκληρα και δύο μισά σπίρτα μπορείς να κατασκευάσεις παραλληλόγραμμα και ποια; Δικαιολόγησε την απάντησή σου.*

## ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ

- *Προσπάθησε να χωρίσεις τα πιο κάτω τετράπλευρα σε ομάδες.*
- *Δώσε από ένα όνομα στο καθένα.*
- *Προσπάθησε να δικαιολογήσεις το χωρισμό σε ομάδες που έκανες.*

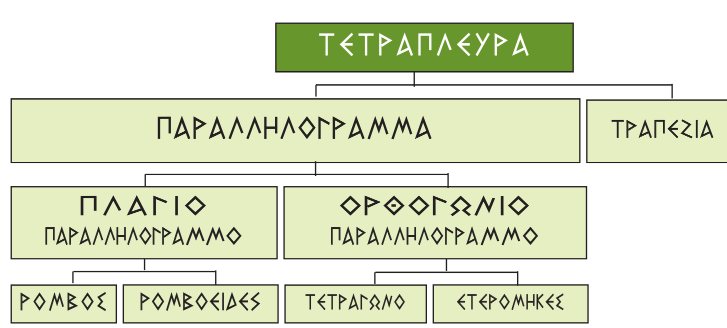


## ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΑΝΑΔΡΟΜΗ

*Ο* **Ευκλείδης** *στα "Στοιχεία" του προτείνει μια ταξινόμηση (Διάγραμμα 1), που δεν χρησιμοποιεί ως κριτήριο την παραλληλία, την οποία εισάγει αργότερα. Τραπέζιο ονομάζει, όχι εκείνο που λέμε εμείς σήμερα, δηλαδή το τετράπλευρο με δύο μόνο πλευρές παράλληλες, αλλά οποιοδήποτε τετράπλευρο. Τον όρο τραπέζιο, με τη σύγχρονη έννοια, τον συναντάμε αργότερα στον* **Αρχιμήδη**. *Επίσης το τετράπλευρο που ονομάζει ρομβοειδές εκφράζει το σημερινό παραλληλόγραμμο.*


*Διάγραμμα 1.*
*Η Ευκλείδεια ταξινόμηση*

*Μια προσπάθεια διόρθωσης της Ευκλείδειας ταξινόμησης απαντάται τον 16ο αιώνα στη "Γεωμετρία" (1569) του* Petrus Ramus *ή* Pierre de la Ramée.

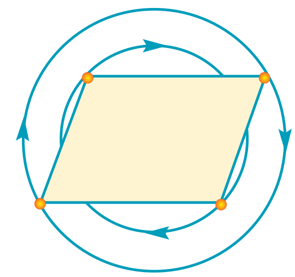



*Διάγραμμα 2.*
*Η ταξινόμηση του Ramus*

# Β.3.4. Ιδιότητες Παραλληλογράμμου - Ορθογωνίου - Ρόμβου - Τετραγώνου - Τραπεζίου - Ισοσκελούς τραπεζίου

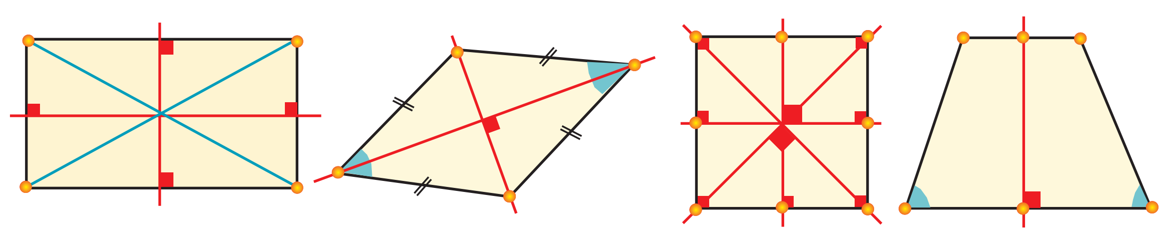
## ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 1η

*Προσπάθησε να διαπιστώσεις εάν το παραλληλόγραμμο έχει κέντρο συμμετρίας.*



## ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ 2η

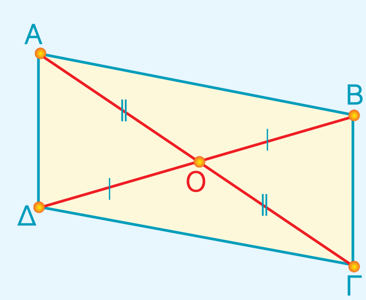
*Προσπάθησε να βρεις τους άξονες συμμετρίας:*
*(α) του ορθογωνίου, (β) του ρόμβου, (γ) του τετραγώνου και (δ) του ισοσκελούς τραπεζίου.*



## Θυμόμαστε - Μαθαίνουμε

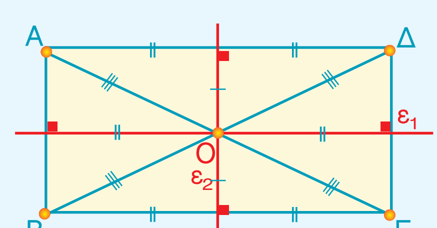
### Ιδιότητες του ορθογώνιου και πλάγιου παραλληλογράμμου

- Σε κάθε παραλληλόγραμμο το σημείο τομής των διαγωνίων του είναι κέντρο συμμετρίας του.
- Οι διαγώνιές του διχοτομούνται (κάθε μία περνάει από το μέσον της άλλης).
- Οι **απέναντι πλευρές** είναι **ίσες**.
- Οι **απέναντι γωνίες** είναι **ίσες**.



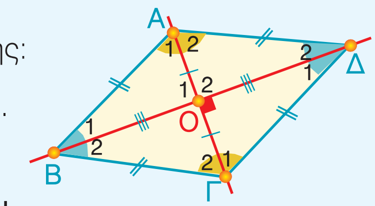

### Στο ορθογώνιο:

- Οι μεσοκάθετοι των πλευρών του είναι άξονες συμμετρίας.
- Οι διαγώνιές του είναι ίσες και διχοτομούνται.



## Ιδιότητες του ρόμβου

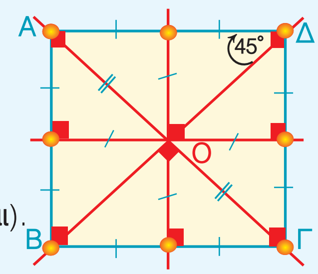
Εκτός των ιδιοτήτων του παραλληλογράμμου έχει ακόμα και τις εξής:




- Οι **ευθείες των διαγωνίων** είναι **άξονες συμμετρίας**.
- Οι **διαγώνιες** είναι **κάθετες** (και **διχοτομούνται**).
- Οι **διαγώνιές** του είναι και **διχοτόμοι των γωνιών του**.

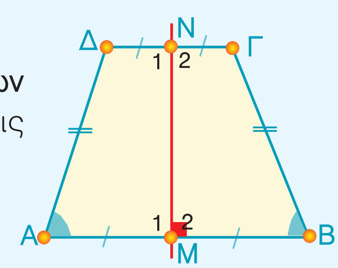
## Ιδιότητες του τετραγώνου

Εκτός των ιδιοτήτων του παραλληλογράμμου έχει ακόμα και τις εξής:




- Οι **ευθείες των διαγωνίων** του και οι **μεσοκάθετοι των πλευρών** του είναι **άξονες συμμετρίας**.
- Οι **διαγώνιές** του είναι **ίσες, κάθετες** (και **διχοτομούνται**).
- Οι **διαγώνιές** του είναι και **διχοτόμοι των γωνιών** του.

## Ιδιότητες του ισοσκελούς τραπεζίου



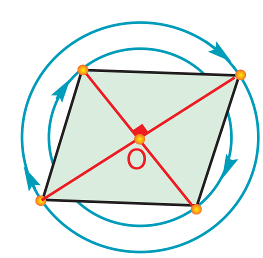

- Η **ευθεία που διέρχεται από τα μέσα των βάσεων** είναι **άξονας συμμετρίας** και **μεσοκάθετος** στις βάσεις του.
- Οι **προσκείμενες** σε κάθε βάση **γωνίες** του είναι **ίσες**.

## *ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΗ*

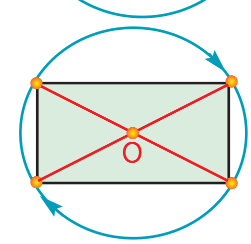
*Να βρεθεί το κέντρο συμμετρίας: (α) του ρόμβου, (β) του ορθογωνίου και (γ) του τετραγώνου.*

### Λύση

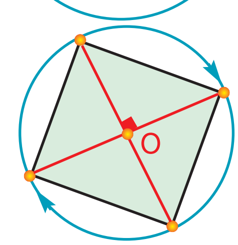
(α) Επειδή ο **ρόμβος** είναι και παραλληλόγραμμο, το σημείο **Ο** τομής των διαγωνίων του θα είναι και κέντρο συμμετρίας του.




(β) Επειδή το **ορθογώνιο** είναι και παραλληλόγραμμο, το σημείο τομής **Ο** των διαγωνίων του θα είναι και κέντρο συμμετρίας του.




(γ) Επειδή το **τετράγωνο** είναι και ορθογώνιο παραλληλόγραμμο το σημείο τομής **Ο** των διαγωνίων του θα είναι και κέντρο συμμετρίας του.



## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. *Σχεδίασε ένα ορθογώνιο, ένα ρόμβο και ένα τετράγωνο με τις διαγώνιές τους και εξέτασε εάν τα τρίγωνα στα οποία χωρίζεται το καθένα από τις διαγώνιες είναι ίσα.*

2. *Σχεδίασε ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ και με διάμετρο τη διαγώνιό του ΑΓ γράψε ένα κύκλο. Δικαιολόγησε το γεγονός ότι ο κύκλος αυτός περνάει από όλες τις κορυφές του ορθογωνίου.*

3. *Σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ φέρε τη διαγώνιο ΒΔ και μετά σύγκρινε τις αποστάσεις των κορυφών Α και Γ απ' αυτή.*

4. *Σχεδίασε ένα παραλληλόγραμμο και από τις κορυφές του φέρε παράλληλες ευθείες προς τις διαγωνίους του. Τι παρατηρείς;*

5. *Σχεδίασε τις διχοτόμους των γωνιών ενός πλαγίου παραλληλογράμμου. Τι παρατηρείς για το σχήμα που δημιουργείται απ' αυτές, εάν προεκταθούν;*

6. *Σχεδίασε τις διχοτόμους των γωνιών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου. Τι παρατηρείς για το σχήμα που δημιουργείται απ' αυτές εάν προεκταθούν; Επίσης, τις διχοτόμους των γωνιών (α) ενός τετραγώνου και (β) ενός ρόμβου. Τι παρατηρείς;*

7. *Σχεδίασε τα ύψη των τριγώνων ΑΒΔ και ΔΒΓ, τα οποία σχηματίζονται, όταν φέρεις τη διαγώνιο ΒΔ του τραπεζίου ΑΒΓΔ. Μέτρησε τα ύψη των δύο αυτών τριγώνων με το υποδεκάμετρο. Τι παρατηρείς; (Δικαιολόγησε την απάντησή σου).*

8. *Πάνω σε δύο μη αντικείμενες ημιευθείες Οx και Οy, πάρε τα σημεία Α και Β αντίστοιχα έτσι, ώστε ΟΑ = ΟΒ. Από το Α φέρε Αy'//Οy και από το Β την Βx'//Οx. Ονόμασε Κ το σημείο τομής των Αy' και Βx'. Φέρε τις διαγώνιες του ΑΟΒΚ και διαπίστωσε τη σχετική τους θέση. Επίσης, σύγκρινε μεταξύ τους τις αποστάσεις του Ο από τις ευθείες Αy' και Βx' και του Κ από τις Οx και Οy.*

9. *Σχεδίασε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ έτσι, ώστε ανά δύο οι διαδοχικές πλευρές του να είναι κάθετες. Αν ΑΒ = 3 cm και ΒΓ = 4 cm. Να βρεις: (α) το μήκος των ΓΔ και ΑΔ και (β) το μήκος των ΒΔ και ΑΓ, με τη βοήθεια του υποδεκάμετρου. Τι παρατηρείς;*

# Επαναληπτικές Ερωτήσεις Αυτοαξιολόγησης

## Α. Τοποθέτησε ένα “x” στην θέση που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

| ΟΝΟΜΑΣΙΑ ΖΕΥΓΟΥΣ ΓΩΝΙΩΝ ΠΑΡΑΛΛΗΛΕΣ ΕΥΘΕΙΕΣ ΤΕΜΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΟ ΕΥΘΕΙΑ | ΣΧΕΣΗ | |
|---|---|---|
| | ΙΣΕΣ | ΠΑΡΑΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ |
| “ΕΝΤΟΣ ΕΝΑΛΛΑΞ” | | |
| “ΕΚΤΟΣ ΕΝΑΛΛΑΞ” | | |
| “ΕΝΤΟΣ ΕΠΙ ΤΑ ΑΥΤΑ” | | |
| “ΕΚΤΟΣ ΕΠΙ ΤΑ ΑΥΤΑ” | | |
| “ΕΝΤΟΣ - ΕΚΤΟΣ ΕΝΑΛΛΑΞ” | | |
| “ΕΝΤΟΣ - ΕΚΤΟΣ ΕΠΙ ΤΑ ΑΥΤΑ” | | |

## Β. Τοποθέτησε ένα “x” στην θέση που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

*(Υπάρχουν και περιπτώσεις που περισσότερες από μία απαντήσεις είναι σωστές).*

1. Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου είναι: ☐ 270° ☐ 180° ☐ 90°
2. Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διάμεσος, που αντιστοιχεί στη βάση, είναι και:
   ☐ Άξονας συμμετρίας ☐ Ύψος ☐ Διχοτόμος
3. Σε κάθε ισόπλευρο τρίγωνο όλες οι εξωτερικές του γωνίες είναι ίσες με:
   ☐ 145° ☐ 270° ☐ 120°
4. Σε κάθε ισοσκελές τραπέζιο είναι ίσες οι:
   ☐ Οι προσκείμενες σε κάθε βάση γωνίες του ☐ Όλες οι πλευρές του ☐ Οι διαγώνιοί του.
5. Σε κάθε ρόμβο οι διαγώνιές του είναι:
   ☐ Άξονες συμμετρίας ☐ Κάθετες και διχοτομούνται ☐ Διχοτόμοι των γωνιών του.
6. Σε κάθε ορθογώνιο παραλληλόγραμμο άξονες συμμετρίας είναι:
   ☐ Οι διαγώνιές του ☐ Οι μεσοκάθετοι των πλευρών του ☐ Οι πλευρές του.
7. Σε κάθε τετράγωνο οι ευθείες των διαγωνίων του είναι:
   ☐ Διχοτόμοι των γωνιών του ☐ Μεσοκάθετοι των πλευρών του ☐ Άξονες συμμετρίας.
8. Σε κάθε παραλληλόγραμμο είναι:
   ☐ Κέντρο συμμετρίας το σημείο τομής των διαγωνίων του.
   ☐ Οι διαγώνιές του άξονες συμμετρίας ☐ Οι διαγώνιές του διχοτομούνται.

## Γ. Τοποθέτησε ένα “x” στην θέση που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

| ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΑ ΣΧΗΜΑΤΑ | ΑΡΙΘΜΟΣ ΑΞΟΝΩΝ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ | | | | | | | | | | | | | ΚΕΝΤΡΟ ΣΥΜΜΕΤΡΙΑΣ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | |
| ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟ ΤΜΗΜΑ | | | | | | | | | | | | | | |
| ΓΩΝΙΑ | | | | | | | | | | | | | | |
| ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗΝ ΓΩΝΙΕΣ | | | | | | | | | | | | | | |
| ΕΝΤΟΣ ΕΝΑΛΛΑΞ ΓΩΝΙΕΣ | | | | | | | | | | | | | | |
| ΤΥΧΑΙΟ ΤΡΙΓΩΝΟ | | | | | | | | | | | | | | |
| ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟ | | | | | | | | | | | | | | |
| ΙΣΟΠΛΕΥΡΟ ΤΡΙΓΩΝΟ | | | | | | | | | | | | | | |
| ΤΡΑΠΕΖΙΟ | | | | | | | | | | | | | | |
| ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ ΤΡΑΠΕΖΙΟ | | | | | | | | | | | | | | |
| ΤΥΧΑΙΟ ΤΕΤΡΑΠΛΕΥΡΟ | | | | | | | | | | | | | | |
| ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΟ | | | | | | | | | | | | | | |
| ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ | | | | | | | | | | | | | | |
| ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ | | | | | | | | | | | | | | |
| ΡΟΜΒΟΣ | | | | | | | | | | | | | | |